

**Enoncé :** Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension 3 Soit  $G$  un sous-groupe fini non trivial de  $SO(E)$

Alors :

1. Si  $G$  fixe  $a \neq 0$ , alors  $G$  est un groupe de rotations autour de  $\langle a \rangle$ . Il est alors cyclique.
2. Si  $G$  admet une orbite de cardinal 2, elle est formée de deux points antipodes  $\{a, -a\}$ .  
Pour le reste, supposons  $G$  non cyclique
3. On a alors l'équivalence entre :
  - $G$  admet une orbite de cardinal 2
  - $G$  admet une orbite non triviale qui n'engendre pas  $E$ .  
 $G$  est alors diédral.
4. Soit  $P_G$  les points de la sphère unité fixés par au moins un élément non trivial de  $G$ .  
Soit  $\Omega_1, \dots, \Omega_e$  les orbites de l'action de  $G$  sur  $P_G$ , classés par ordre croissant des indices  $v_1, \dots, v_e$   
Si on note  $N = |G|$ , alors :
  - $N$  est pair
  - $e = 3$
  - $(N, v_1, v_2, v_3) \in \left\{ \left( N, 2, 2, \frac{N}{2} \right), (12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5) \right\}$

**Preuve :**

1. Une rotation  $g$  non triviale fixant un vecteur non nul  $a$  exactement la droite engendrée par ce vecteur, et donc est une rotation sur cet axe  $\langle a \rangle$ . Voyons la restriction de  $g \in G \setminus \{Id\}$  sur  $\langle a \rangle^\perp$ . C'est une rotation du plan d'ordre fini, puisque élément d'un groupe fini  $G$ , donc d'angle  $\frac{2k\pi}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Ainsi  $G \cong G_{|\langle a \rangle^\perp} \cong U_{\text{ppcm}\{\text{ord}(g), g \in G\}}$  et est donc cyclique.

2. Dans ce cas, soit  $\{a, b\}$  l'orbite de cardinal 2 :

- $\forall g \in G, g(a) \in \{a, b\}$
- $\exists g \in G, g(a) = b$  (sinon  $\{a\}$  serait une orbite singleton).

Ce dernier  $g$  est idempotent. Donc c'est une rotation d'angle  $\pi$  autour d'un axe orthogonal à  $\langle a \rangle$ , et donc  $g(a) = -a$ .

3. «  $\Rightarrow$  » : Résultat direct de 2.

«  $\Leftarrow$  » : Soit  $H$  une droite ou plan engendré par une orbite non triviale de  $G$ , soit donc  $H \in H, H^\perp$  tel que  $\dim(H') = 1$ .  $H'$  est globalement fixé par  $G$  mais aucun point de  $H'$  n'est fixé par  $G$  sinon absurdité puisque on a supposé  $G$  non cyclique. Soit  $a \in H' \setminus \{0\}$ , alors  $\{a, -a\}$  est une orbite de  $G$ .

Montrons que  $G$  est diédral.

Par finitude de  $G$ ,  $G_{|\langle H' \rangle^\perp}$  est fini et donc cyclique (un groupe fini des rotations du

plan est cyclique).  $\left[ G : G_{|\langle H' \rangle^\perp} \right] = 2$  (isomorphe à  $G_{|\langle H' \rangle^\perp}$ ) et donc

$$\exists g \neq Id, g_{|\langle H' \rangle^\perp} = Id. \text{ L'ordre de } g \text{ est donc } 2.$$

Soit  $h \in G, (H')^\perp = \langle h_{|\langle H' \rangle^\perp} \rangle$ . Alors  $h_{|\langle H' \rangle^\perp} \in \{h, h \circ g\}$  Ainsi on a un élément

d'ordre  $\frac{|G|}{2}$ . Si  $h$  et  $g$  commutent,  $G$  serait cyclique ce qui est absurde. On a alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $G$  soit diédral, à savoir un élément d'ordre 2, un élément d'ordre  $\frac{|G|}{2}$  et la non-commutativité de ces deux éléments.

4.  $e = |\text{orb}_G(P_G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g)$ .

- Toute rotation non triviale fixe l'intersection de son axe avec la sphère, à savoir deux points, tandis que  $P_G$  entier est fixé par  $Id$ . Ainsi on aura :

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g) = \frac{1}{N} ((2N - 2) + P_G) = \frac{1}{N} \left( (2N - 2) + \sum_{n=1}^e \frac{N}{v_n} \right).$$

$$\text{Donc } 2 - \frac{2}{N} = \sum_{n=1}^e \left(1 - \frac{1}{v_n}\right). (*)$$

- Remarquons que  $\forall n, 1 - \frac{1}{v_n} \geq \frac{1}{2}$  et que  $\sum_{n=1}^e \left(1 - \frac{1}{v_n}\right) < 2$ , d'où  $e \leq 3$ .

D'autre part  $G$  n'est pas cyclique ce qui implique que  $N \geq 4$ , et donc  $2 - \frac{2}{N} \geq \frac{3}{2}$ . Rappelons que  $1 - \frac{1}{v_n} < 1 \forall n$ , on aura  $e \geq 2$ .

- Supposons que  $e=2$ . Réécrivons l'équation (\*).

$$2 - \frac{2}{N} = 2 - \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \text{ c'est à dire que } \frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \text{ autrement dit } N = v_1 = v_2 \text{ ce qui est absurde, d'où } e=3.$$

Il est clair que  $\forall n, v_n \geq 2$ . Supposons maintenant que  $v_1 \geq 3$ , alors  $n = 1 \Rightarrow v_n \geq 2$  (absurde) donc  $v_1 = 2$ . De plus,  $v_2 \in \{2, 3\}$ , sinon

$$\sum_{n=1}^3 \left(1 - \frac{1}{v_n}\right) \geq \frac{1}{2} + 2 * \left(\frac{3}{4}\right) \geq 2 \text{ (absurde).}$$

$$\text{Si } v_2 = 2, \text{ alors } 1 + 1 - \frac{1}{v_3} = 2 - \frac{2}{N} \text{ d'où } v_3 = \frac{N}{2}.$$

$$\text{Si } v_2 = 3, \text{ alors } 2 - \frac{2}{N} = \frac{7}{6} + \left(1 - \frac{1}{v_3}\right) < 2, \text{ D'où } v_3 \in \llbracket 3, 5 \rrbracket.$$

Calculons  $N$  pour les 3 cas évoqués ci-dessus.

- $v_3 = 3 \Rightarrow N = 12$
- $v_3 = 4 \Rightarrow N = 24$
- $v_3 = 5 \Rightarrow N = 60. \square$